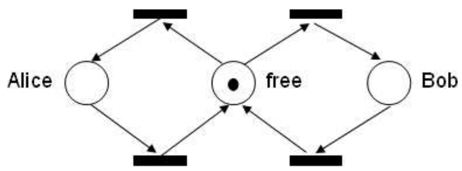
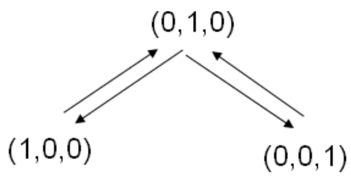
Lösungen zur Beispiel Prüfung
Diskrete Ereignis Systeme

1 Petrinetze (26 Punkte)

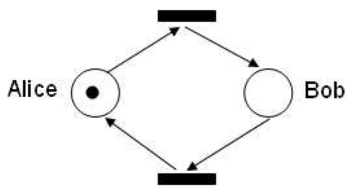
a) (i) The following figure shows a possible solution with three places: Either Alice has the spoon or Bob, or the spoon lies on the table.



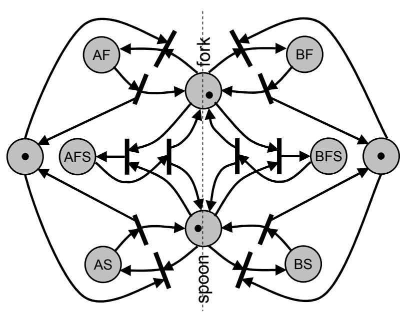
(ii) The claim follows directly from the finite state transition graph:



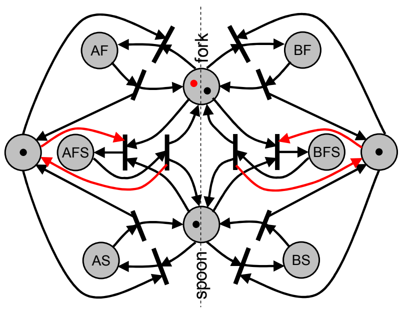
(iii) If Alice and Bob strictly alternate, the petri net looks as follows:



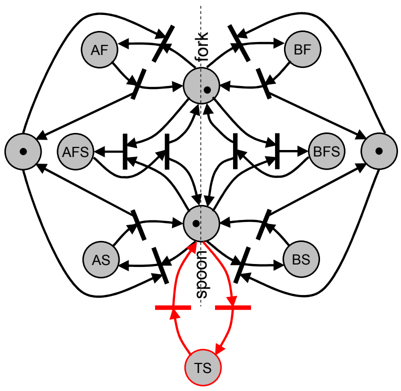
b) The situation could be modelled as shown in the following figure. Note that the petri net is symmetric, since Alice (petri net on the left) and Bob (petri net on the right) behave in the same way. Thereby, AF denotes that Alice has the fork and eats veggies, AS denotes that Alice has the spoon and eats veggies, and the place AFS denotes that Alice uses both fork and spoon to eat spaghetti. BF, BS, and BFS are the corresponding places of Bob. Finally, the place "fork" (or "spoon") means that the fork (or spoon) is free.



c) The additional fork can be taken into account by adding a token to the place "fork free." However, we have to make sure that neither Alice nor Bob has two forks at the same time. This requires two additional transitions as shown in the figure.



d) The petri net now looks as follows:



2 Endliche Automaten und reguläre Sprachen (34 Punkte)

a) See Exercise 3.

b) See Exercise 3.

c) See Exercise 3.

d) (i) Wir beweisen die Abgeschlossenheit indem wir aufzeigen, dass wir einen FA bauen können, der die gesuchte Sprache erkennt.

   (1) Baue den DFA A der L beschreibt
   (2) In A, markiere alle Zustände, die mit einer Transition in einen akzeptierenden oder bereits markierten Zustand führen.
   (3) Wiederhole Schritt (2) bis keine neuen Zustände mehr markiert werden.
   (4) Setze alle markierten Zustände als nicht akzeptierend.

   (ii) Wir beweisen die Abgeschlossenheit wiederum indem wir zeigen, wie wir einen FA bauen können, der $SHUFFLE(L_1, L_2)$ erkennt. Idee: Wir machen das 'Kreuzprodukt' der zwei Automaten, so dass wir (je nach Inputzeichen) entweder auf dem einen oder auf dem anderen laufen, und erst dann akzeptieren, wenn beide Teilautomaten akzeptieren würden.

   (1) Baue den DFA A der L_1 beschreibt und B der L_2 beschreibt. Nummeriere alle Zustände von A von α_1 bis α_{k1} und alle Zustände von B von β_1 bis β_{k2} (wobei $k1$ die Anzahl Zustände von A ist, und $k2$ die Anzahl Zustände von B).
   (2) Baue einen neuen Automaten C mit $k1 \cdot k2$ Zuständen, nummeriert durch $\gamma_{i,j}$, wobei $i \in [1 \ldots k1]$ und $j \in [1 \ldots k2]$ ist. $\gamma_{i,j}$ ist akzeptierend genau dann wenn α_i und β_j akzeptierend sind.

3) Für jede Transition (α_n, α_m) in A, füge in C die Transitionen ($\gamma_{n,x}$, $\gamma_{m,x}$) für $x \in [1 \ldots k2]$ zu.
4) Für jede Transition (β_n, β_m) in C, füge in C die Transitionen ($\gamma_{x,n}$, $\gamma_{x,m}$) für $x \in [1 \ldots k1]$ zu.

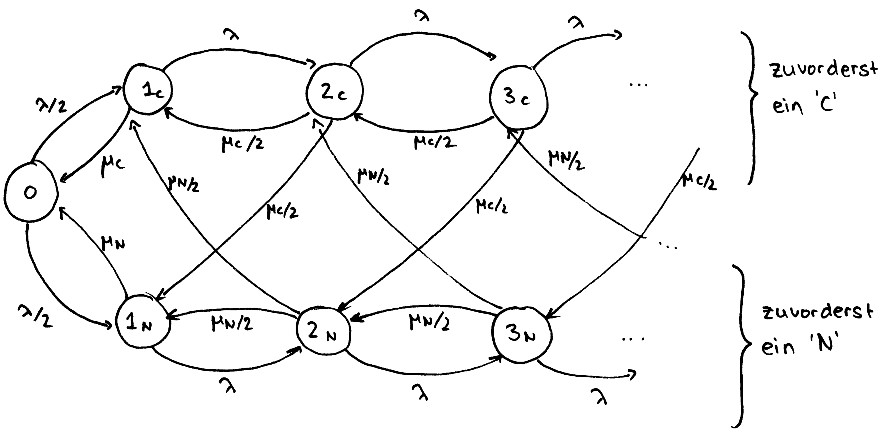
3 Zeitkontinuierliche stochastische Prozesse (22 Punkte)

a) Die Wartezeit ist gegeben durch $W = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. Bei Alice und Bob verteilt sich der einkommede Strom auf zwei Teilströme mit einer Rate von jeweils $\lambda/2$. Somit ergibt sich dass $W_{AB} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda/2)}$. Bei Trudi, die doppelt so schnell arbeitet, gilt $W_T = \frac{\lambda}{2\mu(2\mu-\lambda)}$. Somit ist $W_T < W_{AB}$ falls $2\mu - \lambda > \mu - \lambda/2$, d.h. wenn $\mu > \lambda/2$ gilt. Dies muss sowieso gelten, denn sonst ist das System nicht stabil. Somit ist die Wartezeit bei Trudi tatsächlich kleiner.

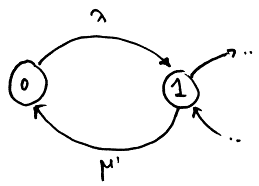
b) Die Ankunfstwahrscheinlichkeit für beide Typen ist 0.5. Leute vom Typ N sind im Schnitt 9 Minuten am Telefon, wobei die Leute vom Typ C bloss 3 Minuten benötigen. Im stationären zustand besetzen Leute vom Typ N $\frac{9}{12}$ der Zeit das Telefon, und leute vom Typ C $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ der Zeit das Telefon, was die gesuchte Wahrscheinlichkeit gibt.

c) Da die Kunden zufällig ankommen, ist die Wahrscheinlichkeit 0.5.

d) Wir modellieren den Typ (C,N), der zu vorderst in der Schlange steht und abgearbeitet wird.



e) Für den Fall, dass mindestens eine Person im System ist, wir wissen, dass die vorderste Person mit Wahrscheinlichkeit 0.25 eine C-Person und mit Wahrscheinlichkeit 0.75 eine N-Person ist. D.h. die Rate, mit welcher Leute abgearbeitet werden ist $\mu' = 0.25\mu_C + 0.75\mu_N$. Somit können wir das System als eine MM1 Warteschlange modelieren mit Ankunftsrate λ und Bedienrate μ'. Wir suchen $\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{\lambda}{\mu'} = \frac{1}{4}$.



4 Online Algorithmen and kompetitive Analyse (35 Punkte)

Diese Übung wurde in der Vorlesung besprochen.