Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Distributed Computing

HS 2010

Prof. R. Wattenhofer / J. Smula, T. Langner

Diskrete Ereignissysteme

Prüfung

Dienstag, 25. Januar 2011, 9:00 – 12:00 Uhr

Nicht öffnen oder umdrehen bevor die Prüfung beginnt!

Die Prüfung dauert 180 Minuten und es gibt insgesamt 180 Punkte. Die Anzahl Punkte pro Teilaufgabe steht jeweils in Klammern bei der Aufgabe. Sie dürfen die Prüfung englisch oder deutsch beantworten. Begründen Sie alle Ihre Antworten und beschriften Sie Skizzen und Zeichnungen verständlich. Schreiben Sie zu Beginn Ihren Namen und Ihre Legi-Nummer in das folgende dafür vorgesehene Feld.

Name	**Legi-Nr.**

Punkte

Aufgabe	**Erreichte Punktzahl**	**Maximale Punktzahl**
1		63
2		49
3		39
4		29
Summe		180

1 Sprachen und Automaten (63 Punkte)

a) Konstruieren Sie jeweils einen endlichen Automaten (FA), der über dem Alphabet $\Sigma = \{e, h, t\}$ die folgenden Sprachen akzeptiert.

Hinweis: Nicht-Determinismus ist erlaubt.

(i) [5] $\mathcal{L}_1$ ist die Menge aller Wörter, die das Teilwort "eth" *genau* zweimal enthalten.

(ii) [5] $\mathcal{L}_2$ ist die Menge aller Wörter, die durch den regulären Ausdruck

$$(e(t \cup e)^*h) \cup (e(th)^*(e \cup h)^*)$$

beschrieben werden.

(iii) [5] $\mathcal{L}_3$ ist die Menge aller Wörter, die mit "the" beginnen und mit "eth" aufhören.

b) [8] Entscheiden Sie für die folgende Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, ob sie regulär, kontextfrei, beides, oder keines von beidem ist. Beweisen Sie Ihre Antwort.

$\mathcal{L} = \{0^a\,(1 \cup \varepsilon)\,0^{2a} \mid a \bmod 3 = 0\}$

Hinweis: Der Modulo-Operator "mod" berechnet den Rest einer Ganzzahldivision. So gilt bspw. $11 \bmod 4 = 3$, da $11 = 2 \cdot 4 + 3$.

c) [10] Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage: Die Menge der kontextfreien Sprachen ist unter Durchschnittsbildung abgeschlossen, d. h. für zwei kontextfreie Sprachen $\mathcal{L}_a$ und $\mathcal{L}_b$ ist der Durchschnitt $\mathcal{L}_a \cap \mathcal{L}_b$ der beiden Sprachen ebenfalls kontextfrei.

d) Konstruieren Sie eine Turingmaschine M, die zwei Zahlen a und b in unärer Kodierung (die Zahl n wird kodiert durch n Einsen) miteinander multipliziert. Zu Beginn enthält das Band die unär kodierte Zahl a gefolgt vom Multiplikationszeichen '$\times$' gefolgt von der unär kodierten Zahl b. Der Lesekopf zeigt auf die am weitesten links stehende Eins von a. Nach der Berechnung soll das Band nur noch das ebenfalls unär kodierte Ergebnis $c = a \cdot b$ enthalten und der Lesekopf soll auf die am weitesten links stehende Eins zeigen.

Hinweis: Leere Bandzellen enthalten das Zeichen $\Box$. Sie dürfen das Bandalphabet um eigene Zeichen erweitern.

(i) [6] Beschreiben Sie die grobe Funktionsweise Ihrer Turingmaschine in drei bis vier Sätzen.

(ii) [14] Geben Sie einen DFA mit möglichst wenig Zuständen an, der Ihre Turingmaschine M steuert. Benutzen Sie die folgende Notation für Ihre Transitionen.

$\alpha \mid \gamma$	Lies α an der aktuellen Position und bewege danach den Lesekopf nach links wenn $\gamma = L$ oder nach rechts wenn $\gamma = R$.
$\alpha \to \beta \mid \gamma$	Lies α an der aktuellen Position, ersetze es durch β und bewege danach den Lesekopf in Richtung γ.
$\alpha \to \Box \mid \gamma$	Lies α an der aktuellen Position, lösche es und bewege danach den Lesekopf in Richtung γ.

e) [10] Sei M_1 eine Turingmaschine, deren Band auf einer Seite begrenzt ist (Bandzellen im Intervall $[0, \infty)$), und M_2 eine Turingmaschine, deren Band nach beiden Seiten hin unbegrenzt ist (Intervall $(-\infty, \infty)$). Ist M_2 gleich mächtig wie M_1? Falls ja, geben Sie an, wie M_1 auf M_2 simuliert werden kann und umgekehrt. Falls nein, geben Sie eine Funktion an, die nur auf einer der beiden Maschinen berechnet werden kann und begründen Sie weshalb.

2 Markov-Ketten (49 Punkte)

Neben ihren Jobs als Doktoranden an der ETH, als Eisverkäufer, Nachtwächter und Fliessbandarbeiter haben Tobias und Jasmin einen weiteren Job angenommen: Sie arbeiten nun zusätzlich an der Kasse bei der Supermarktkette *Aldl*.

a) Jasmin ist launisch: Sie hat genau zwei Gemütszustände, gutgelaunt und missmutig. Die Kunden, die an ihrer Kasse stehen, sind entweder freundlich oder unfreundlich. Sobald Jasmin dreimal hintereinander einen unfreundlichen Kunden hatte, wird sie missmutig. Wenn sie missmutig ist und der nächste Kunde an ihrer Kasse freundlich ist, wird sie mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ wieder gutgelaunt. Ein neu ankommender Kunde ist mit Wahrscheinlichkeit $2/3$ freundlich und mit Wahrscheinlichkeit $1/3$ unfreundlich. Wir nehmen an, dass Jasmins Schicht lang genug ist, dass am Ende des Arbeitstages die stationäre Verteilung erreicht ist.

(i) [5] Zeichnen Sie den Prozess als Markov-Kette!

(ii) [5] Ist die Markov-Kette ergodisch? Begründen Sie!

(iii) [3] Wieviele Kunden hintereinander müssen im Erwartungswert eine missmutige Jasmin ertragen?

(iv) [5] Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Jasmin nach ihrer Schicht gutgelaunt nach Hause geht?

(v) [3] Nehmen wir nun Folgendes an: Wenn Jasmin schon missmutig ist und ein weiterer unfreundlicher Kunde kommt, wird sie wütend und bleibt bis zum Ende ihrer Schicht wütend. Wie hoch ist nun die Wahrscheinlichkeit, dass Jasmin gutgelaunt nach Hause geht?

b) Tobias und Jasmin sitzen an jeweils einer von insgesamt zwei Kassen im Aldl, jede Kasse mit eigener Warteschlange. Die Zeit, die Tobias und Jasmin benötigen, um einen Kunden zu bedienen, ist bei beiden exponentialverteilt mit Parameter μ. Die Kunden kommen mit einer Rate von λ bei den Kassen an. Ein Kunde geht jeweils an die Kasse mit weniger Leuten. Wenn beide Kassen genau gleich lange Schlangen haben, dann wählt der Kunde eine Kasse zufällig gleichverteilt.

(i) [8] Modellieren Sie das Kassensystem als Markov-Kette!

(ii) [4] Kann es sich für einen Kunden lohnen, die Kasse zu wechseln? Konkret: Angenommen, Sie befinden sich an Tobias' Kasse. Ein Kunde wird gerade bedient und ein weiterer steht vor Ihnen in der Schlange. An Jasmins Kasse wird auch ein Kunde bedient, aber die Schlange ist leer. Ist es sinnvoll, die Kasse zu wechseln? Was ist die Wahrscheinlichkeit P, dass Sie an Jasmins Kasse schneller bedient werden? Schätzen Sie P, und begründen Sie Ihre Schätzung (mit Worten).

(iii) [4] Wie hängt P von λ und μ ab? Begründen Sie (mit Worten).

(iv) [8] Mit welcher Formel kann man P von Teilaufgabe (ii) beschreiben? (Die Rechnung selbst müssen Sie nicht machen.)

(v) [4] Ändern Sie Ihre Markov-Kette aus Teilaufgabe (i), so dass auch Warteschlangen-Wechsel sinnvoll modelliert werden! Erklären Sie Ihre Änderungen (mit Worten). Nehmen Sie an, dass die Kunden wissen, dass Tobias und Jasmin gleich schnell arbeiten, und dass die Kunden sofort reagieren, und mit maximaler Vernunft gesegnet sind.

3 PhD-Scheduling und kompetitive Analyse (39 Punkte)

Wir betrachten das PhD-Scheduling-Problem, bei welchem Prof. Arno Nym lästige zu erledigende Aufgaben an seine Doktoranden verteilen muss. Wenn Prof. Nym am Morgen ins Büro kommt, liegt auf seinem Schreibtisch ein Stapel von Aufgaben, von denen er jeweils nur die oberste sieht. Er möchte *online* entscheiden, welcher seiner m Doktoranden die zuoberst liegende Aufgabe erledigen soll, bevor er die nächste Aufgabe anschaut. Er weiss beim Zuweisen der Aufgaben auch nicht, wann die letzte Aufgabe erreicht ist, da unter dem Aufgabenstapel noch weitere Unterlagen liegen. Jede Aufgabe muss von genau einem Doktoranden bearbeitet werden und jeder Doktorand kann jede Aufgabe bearbeiten. Natürlich möchte Prof. Nym, dass alle Aufgaben so schnell wie möglich erledigt werden.

Eine Aufgabe ist definiert durch ihren Aufwand $a_i \in \mathbb{R}^+$, unabhängig davon welcher Doktorand sie bearbeitet. Verschiedene Aufgaben können unterschiedlichen Aufwand haben. Die Last L_j eines Doktoranden j ist definiert als die Summe der Aufwände aller ihm zugewiesenen Aufgaben. Er benötigt also die Zeit L_j um alle seine Aufgaben zu erledigen. Prof. Nyms Ziel ist es, dass möglichst schnell alle Aufgaben erledigt sind. Das heisst also, dass die maximale Last über alle Doktoranden minimiert werden soll. Für eine Sequenz σ von Aufgaben $a_1, a_2, \ldots$ sind die Kosten einer Zuweisung von σ demnach gegeben durch $\max_{j=1,\ldots,m} L_j$.

Betrachten Sie im Folgenden den Algorithmus SmallLoad, der die nächste Aufgabe immer einem Doktoranden mit der momentan geringsten Last zuweist.

a) Nehmen Sie an, dass Prof. Nym nur zwei Doktoranden hat, es gilt also $m = 2$.

(i) [6] Beschreiben Sie anhand von Skizzen den Ablauf des Algorithmus SmallLoad bei folgender Aufgabensequenz σ.

$$\sigma = 2,\ 5,\ 4,\ 3,\ 7$$

Was ist eine optimale Lösung für diese Sequenz? Wie kompetitiv ist SmallLoad im Bezug auf die Sequenz σ?

(ii) [5] Die Lösung von SmallLoad kann schlechter sein als die optimale Zuweisung. Konstruieren Sie eine Aufgabensequenz σ, bei welcher die Kosten von SmallLoad im Vergleich zur optimalen Lösung möglichst hoch sind.

(iii) [15] Ist SmallLoad c-kompetitiv für irgendeine Konstante c? Wenn ja, geben Sie die kleinstmögliche Konstante! Beweisen (oder notfalls begründen) Sie Ihre Antwort.

(iv) [3] Lässt sich die optimale *Offline*-Lösung einfach berechnen?

b) [6] Betrachten Sie nun das allgemeinere Modell mit mehr als zwei Doktoranden. Nehmen Sie also an, dass es nun $m \in \mathbb{N}$ Doktoranden gibt. Wie kompetitiv ist SmallLoad jetzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

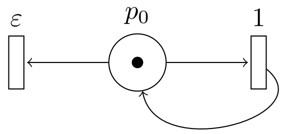
c) [4] Man kann beweisen, dass bessere Online-Algorithmen als SmallLoad existieren. Auf welchen Ideen könnten solche verbesserten Online-Algorithmen basieren? Nennen Sie zwei Ideen (jeweils 1 Satz).

4 Petrinetze und CTL (29 Punkte)

Petrinetze

In den folgenden Teilaufgaben soll jeweils ein Petrinetz P inklusive einer passenden Startverteilung von Tokens angegeben werden, das die Wörter der Sprache $\mathcal{L}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ generiert. Die Transitionen sollen dabei so mit jeweils einem Symbol aus Σ oder dem leeren Wort ε beschriftet werden, dass ein Wort w von P genau dann akzeptiert wird, wenn es einer gültigen Feuersequenz σ_w entspricht und P nach Ausführen von σ_w tot ist.

Beispiel: Das folgende Petrinetz akzeptiert das Wort $v = 11$, weil es eine entsprechende Feuersequenz $\sigma_v = 1, 1, \varepsilon$ gibt, nach deren Ausführung das Netz tot ist.



Dieses Petrinetz akzeptiert übrigens die Sprache $L = 1^*$.

Geben Sie jeweils ein entsprechendes Petrinetz P an, das die Wörter der Sprache $\mathcal{L}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ generiert.

a) [5] $\mathcal{L} = \{w \mid w \text{ hat gerade Länge}\}$

b) [8] $\mathcal{L} = \{(0^a 1^b)^* \mid a > b, b \geq 0\}$

Kripke-Strukturen und CTL

c) Welche der folgenden Paare von CTL-Formeln sind äquivalent? Begründen Sie, warum die Formeln äquivalent sind, oder geben Sie andernfalls eine Kripke-Struktur an, die eine der Formeln erfüllt und die andere nicht.

(i) [4] $\exists\Diamond\phi \quad \stackrel{?}{\equiv} \quad \exists\Diamond\forall\Diamond\phi$

(ii) [4] $\forall\Diamond\forall\Box\phi \quad \stackrel{?}{\equiv} \quad \forall\Box\forall\Diamond\phi$

d) Drücken Sie die folgenden Eigenschaften durch CTL-Formeln aus. Erläutern Sie Ihre Formeln.

(i) [4] Es gibt einen Pfad, auf dem für jeden Zustand s gilt: es gibt einen Pfad, der in s beginnt und auf dem irgendwann ϕ_1 und im nächsten Zustand $\neg\phi_1$ gilt.

(ii) [4] Es gibt einen erreichbaren Zustand s, für den gilt: p_1 ist wahr und auf allen Pfaden, die von s ausgehen, gilt p_3 solange p_2 nicht gilt.